* طرق حل المعادلات التفاضلية:

١- طريقة فصل المتغيرات:

أ) $y' = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$\int dy = \int f(x)\,dx$$

$$y = \int f(x)\,dx + c$$

ب) $y' = f(y)$

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int dx$$

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + c$$

ج) $y' = f(x) \cdot f(y)$

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int f(x)\,dx + c$$

$$f(x) \cdot Q(y)\,dy + P(x) \cdot \emptyset(y)\,dy = 0$$

جداء

$$\int \frac{f(x)}{P(x)}\,dx + \int \frac{\emptyset(y)}{Q(y)}\,dy = 0$$

$$\frac{f(x)}{P(x)}\,dx + \frac{\emptyset(y)}{Q(y)} = c$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية

$$y' = 3x^2(y+1)$$

متغير منفصل $\frac{dy}{dx} = y' = 3x^2(y+1)$

نفصل كل طرف

$$\int \frac{dy}{y+1} = 3x^2\,dx$$

$\ln|y+1| = 3\frac{x^3}{3} + c$ حيث نستنتج بحساب الحل فيصبح

الموضوع

$\ln|y+1| = x^2 + \ln c$ نتخلص من الـ (ln) والعتبة المطلقة

$$\ln \frac{y+1}{c} = x^3$$

$$y+1 = c e^{x^3}$$

فان الحل العام للمعادلة هو $\boxed{y = c e^{x^3} - 1}$ وهو المطلوب

* فإذا كان $y+1 = 0$

$y' = 0$ و $\Rightarrow y = -1$

للتأكد نعوض في المعادلة فان $0 = 0$ فإذاً $y = -1$ حل المعادلة

• بعدها نعوض ب الحل العام فان $y = -e^{x^3} - 1$ / بالتعويض $c = 0$ /

فان الحل هو حل خاص

مثال 2

أوجد الحل العام للمعادلة / لاقص الحلول /

$$y' = x \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = x \cdot dx$$

نقوم بالمكاملة $\int \frac{dy}{y} = \int x \cdot dx$

$$\ln y = \frac{x^2}{2} + \ln c$$

وهو الحل الضمني $\ln \frac{y}{c} = \frac{x^2}{2}$

$$y = c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

وإذا كان $y = 0$ فان $y' = 0$

نعوض بالمعادلة فتتحقق المعادلة

وينتج من عبارة الحل العام بإعطاء $c = 0$ / نحصل على حل خاص

$$y' = x \cdot y^2$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x\, dx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + c$$

نوحد المقامات لنقلب المعادلة

$$y = -\frac{2}{x^2 + 2c}$$

فإذا كان $y^2 = 0$

ينتج أن $y = 0$

بالتعويض $0 \equiv 0$ يحقق هو حل

★ وهذا الحل هو حل شاذ حسب الخاصية للحل الشاذ ★

★ المعادلات التفاضلية التي تؤدإلى معادلات ذات متحولات منفصلة ★

(P) $y' = f(ax + by + c)$ عند التحويل من z ← y وفق التحويل التالي

$ax + by + c = z \Rightarrow y = \frac{1}{b}(z - ax - c)$ نشتق

$$y' = \frac{1}{b}(z' - a)$$

$$\frac{1}{b}(z' - a) = f(z)$$

$$(★) \quad \boxed{z' = b f(z) + a}$$

ينتج $\int \frac{dz}{bf(z)+a} = \int dx + c$ الحل العام للمعادلة ذات المتغيرات المنفصلة وهو حل المعادلة (*) وبالتعويض بالعودة إلى المعادلات السابقة نعود إلى الحل العام

ب) المعادلة التفاضلية من الشكل

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

نلاحظ أن

$$D_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$D_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

* الحالة الأولى

عندما تكون النسب $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

ما مستقيمين متطابقين

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a_2\lambda \\ b_1 = b_2\lambda \\ c_1 = c_2\lambda \end{array}\right] \Rightarrow \quad y' = f\left(\frac{\lambda(a_2x + b_2y + c_2)}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = f(\lambda)$$

$$\int dy = \int f(\lambda)\, dx$$

$$y = \int f(\lambda)\, dx + c = kx + p$$

* الحالة الثانية $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

من التناسبات نجد $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda$

نعوض في المعادلة

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \lambda a_2 \\ b_1 = \lambda b_2 \end{array}\right]$$

نحصل على: $y' = f\left(\dfrac{\lambda a_2x + \lambda b_2y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$

$$= \phi(a_2x + b_2y)$$

وهي معادلة من النوع الاول وهي تؤدي إلى المعادلة ذات متغيرات منفصلة بالعودة للمتغيرات القديمة ينتج لدينا الحل العام

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y' = 2x + y + 1$$

$$z = 2x + y + 1 \Rightarrow y = z - 2x - 1$$

$$y' = z' - 2$$

نأخذ نعوض في المعادلة فينتج

$$z' - 2 = 2x + z - 2x - 1 + 1$$

$$\boxed{z' = z + 2}$$ ذات متغيرات

$$\ln(z+2) = x + \ln c$$

$$\ln \frac{z+2}{c} = x$$

$$z + 2 = ce^{x}$$

$$\boxed{z = ce^{x} - 2}$$

$$2x + y + 1 = ce^{x} - 2$$

$$\boxed{y = ce^{x} - 2x - 3}$$ الحل العام